TD d'optimisation différentiable

François-Pierre Paty

1 TD du lundi 23 mars

Exercice 13.1. Résoudre

$$\min_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+2y=4}} \; x^2+y^2.$$

1. La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue, et l'ensemble $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2\,,\, x+2y=4\}$ est compact, donc f atteint ses bornes sur K, en particulier le minimum existe.
2. Les fonctions de contrainte $(x,y) \mapsto -x$, $(x,y) \mapsto -y$ et $(x,y) \mapsto x+2y-4$ sont affines, et l'ensemble des contraintes est non vide (par exemple $(2,1)$ verifie les contraintes), donc tous les points sont qualifiés pour KKT.
3. On écrit le Lagrangien du problème : $\mathscr{L}(x,y,\lambda,\mu_1,\mu_2) = x^2+y^2+\lambda(x+2y-4)-\mu_1 x-\mu_2 y$. Le système KKT s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \\ x+2y=4 \\ \mu_1 x = 0 \\ \mu_2 y = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\lambda-\mu_1=0 \\ 2y+2\lambda-\mu_2=0 \\ x+2y=4 \\ \mu_1 x=0 \\ \mu_2 y=0 \\ \mu_1\geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

   Pour résoudre ce système, on part des équations de "complementary slackness" et on fait des disjonctions de cas.

   - **CAS A : $\mu_1 > 0$.** Si $\mu_1 > 0$, alors $x=0$ (car $\mu_1 x = 0$). Donc $y=2$ (car $x+2y=4$). Donc $\mu_2 = 0$ (car $\mu_2 y = 0$). Donc $2y+2\lambda=0$, *i.e.* $\lambda=-y=-2$. Mais d'après la première équation du système, $\mu_1=\lambda$ (car $x=0$). Donc $\mu_1=-2$. C'est absurde car on a supposé que $\mu_1>0$.
   - **CAS B : $\mu_1 = 0$.** On va distinguer selon μ_2 :
     - **CAS B.1 : $\mu_2 > 0$.** Dans ce cas, $y=0$ (car $\mu_2 y=0$), et donc $x=4$ (car $x+2y=4$). Or d'après la première équation, comme $\mu_1=0$, on a que $\lambda=-2x=-8$. Mais d'après la deuxième équation, $\mu_2=2y+2\lambda=-16$ car $y=0$. C'est absurde car on avait supposé que $\mu_2>0$.
     - **CAS B.2 : $\mu_2 = 0$.** C'est donc l'unique cas possible : $\mu_1=\mu_2=0$. Dans ce cas, le système KKT se réécrit :

$$\begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+2\lambda=0 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-2x \\ 2y-4x=0 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-2x \\ y=2x \\ x+4x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-2x \\ y=2x \\ x=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{8}{5} \\ \lambda=-\frac{8}{5} \end{cases}$$

   Le système KKT possède donc une unique solution : $x=\frac{4}{5}, y=\frac{8}{5}, \lambda=-\frac{8}{5}, \mu_1=0, \mu_2=0$.
4. Le minimum est donc atteint en un unique point $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$ et vaut $\frac{16}{5}$.

2 TD du lundi 30 mars

Exercice 13.2. Résoudre

$$\min_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\geq 0}} x-y.$$

1. La fonction $f:(x,y)\mapsto x-y$ est continue, et l'ensemble $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\,x^2+y^2\leq 1,,x\geq 0\}$ est compact, donc f atteint ses bornes sur K, en particulier le minimum existe.
2. Les fonctions de contrainte d'inégalité $(x,y)\mapsto x^2+y^2-1$ et $(x,y)\mapsto -x$ sont convexes, et l'ensemble des contraintes est non vide (par exemple $(0,1)$ verifie les contraintes), donc tous les points sont qualifiés pour KKT.
3. On écrit le Lagrangien du problème :

$$\mathscr{L}(x,y,\mu_1,\mu_2)=x-y+\mu_1\times(x^2+y^2-1)+\mu_2\times(-x).$$

Le système KKT s'écrit alors :

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\mu_1,\mu_2)=0\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\mu_1,\mu_2)=0\\ \mu_1\times(x^2+y^2-1)=0\\ \mu_2\times(-x)=0\\ \mu_1\geq 0\\ \mu_2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2\mu_1x-\mu_2=0\\ -1+2\mu_1y=0\\ \mu_1(x^2+y^2-1)=0\\ \mu_2x=0\\ \mu_1\geq 0\\ \mu_2\geq 0\end{cases}$$

— Supposons que $\mu_2>0$. Alors par complementary slackness, on obtient que $x=0$:

$$\begin{cases}1-\mu_2=0\\ -1+2\mu_1y=0\\ \mu_1(y^2-1)=0\\ \mu_1\geq 0\end{cases}$$

— Si $\mu_1=0$, la deuxième équation nous donne que $-1=0$, ce qui est absurde.

— Donc $\mu_1>0$. Par complementary slackness, on obtient $y^2=1$:

$$\begin{cases}\mu_2=1\\ -1+2\mu_1y=0\\ y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu_2=1\\ 2\mu_1y=1\\ y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu_2=1\\ \mu_1=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$$

Donc on vient de trouver une première solution du système : $x=0,y=1,\mu_1=\frac{1}{2},\mu_2=1$.

— Supposons que $\mu_2=0$. On a :

$$\begin{cases}1+2\mu_1x=0\\ -1+2\mu_1y=0\\ \mu_1(x^2+y^2-1)=0\\ \mu_1\geq 0\end{cases}$$

On sait que $x\geq 0$ et $\mu_1\geq 0$, mais d'après la première équation on obtient $2\mu_1x=-1$ ce qui est absurde.

Le système KKT possède donc une unique solution $x=0,y=1,\mu_1=\frac{1}{2},\mu_2=1$.

4. Le minimum est donc atteint en l'unique solution de KKT $x=0,y=1$.

Exercice 13.4. Résoudre

$$\min_{\substack{e^x+e^y\leq 20\\ x\geq 0}} e^{x-y}.$$

1. **Existence d'un minimum :** La fonction objectif $f : (x,y) \mapsto e^{x-y}$ est continue. Soit l'ensemble des contraintes $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, e^x + e^y \leq 20, x \geq 0\}$. Soit $m = \inf_{(x,y)\in K} f(x,y)$. Pour $(x,y) \in K$ avec y suffisamment petit ($y < A$), $f(x,y) > m+1$ car $f(x,z) \to +\infty$ quand $z- > -\infty$. Donc $m = \inf_{\substack{(x,y)\in K\\ y\geq A}} f(x,y)$. Or l'ensemble $\{(x,y) \in K, y \geq A\}$ est un ensemble compact. Donc l'infimum est bien atteint, *i.e.* le minimum existe.
2. **Qualification pour KKT :** Les contraintes d'inégalité sont convexes, et l'ensemble des contraintes est d'intérieur non vide, donc tous les points des contraintes sont qualifiés pour KKT.
3. **Lagrangien :** $\mathscr{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = e^{x-y} + \mu_1 \times (e^x + e^y - 20) + \mu_2(-x)$.
4. **Résolution du système KKT :**

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\mu_1,\mu_2) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\mu_1,\mu_2) = 0 \\ \mu_1 \times (e^x + e^y - 20) = 0 \\ \mu_2 \times (-x) = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} + \mu_1 e^x - \mu_2 = 0 \\ -e^{x-y} + \mu_1 e^y = 0 \\ \mu_1 \times (e^x + e^y - 20) = 0 \\ \mu_2 \times (-x) = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

   — Supposons que $\mu_1 = 0$. D'après la deuxième équation, $e^{x-y} = 0$ ce qui est impossible.

   — Donc $\mu_1 > 0$. Alors par complementary slackness, $e^x + e^y = 20$:

$$\begin{cases} e^{x-y} + \mu_1 e^x - \mu_2 = 0 \\ -e^{x-y} + \mu_1 e^y = 0 \\ e^x + e^y = 20 \\ \mu_2 \times x = 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

   — Supposons d'abord que $\mu_2 = 0$. Alors $e^{x-y} = -\mu_1 e^x < 0$, ce qui est absurde.

   — Donc $\mu_2 > 0$. Par complementary slackness, $x = 0$:

$$\begin{cases} e^{x-y} + \mu_1 e^x - \mu_2 = 0 \\ -e^{x-y} + \mu_1 e^y = 0 \\ e^x + e^y = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ -e^{-y} + \mu_1 e^y = 0 \\ 1 + e^y = 20 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ -e^{-y} + \mu_1 e^y = 0 \\ y = \log(19) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \log(19) \\ \mu_1 = \frac{1}{361} \\ \mu_2 = \frac{20}{361} \end{cases}$$

5. **Conclusion :** Donc le problème possède une unique solution $x = 0, y = \log(19)$ et vaut $e^{0-\log(19)} = \frac{1}{19}$.

3 TD du mardi 31 mars

3.1 Rappels

Pourquoi les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'inégalité ont-ils un signe ? Comment savoir s'il s'agit d'un ≥ 0 ou d'un ≤ 0 ?

Prenons le cas d'une seule contrainte d'inégalité. On cherche donc à résoudre le problème :

$$\min_{h(x)\leq 0} f(x).$$

Ceci se réécrit en :

$$\min_{h(x)\leq 0} f(x) = \min_{x} \left\{ f(x) + \sup_{\mu\geq 0} \mu \times h(x) \right\}$$

En effet, pour x fixé :

$$\sup_{\mu\geq 0} \mu \times h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } h(x) \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement si on avait un problème de maximisation, on aurait :

$$\max_{h(x)\leq 0} f(x) = \max_{x} \left\{ f(x) + \inf_{\mu\leq 0} \mu \times h(x) \right\}$$

3.2 Exercices

Exercice Résoudre les problèmes suivants :

$$\max_{x^2+2y^2\leq 1} x + 2y$$

(solution : $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et la valeur $= \frac{3}{\sqrt{3}}$) et

$$\max_{\substack{x^2+2y^2\leq 1 \\ 3x+y=0}} x + 2y.$$

1. **Existence d'un maximiseur :** L'objectif $f(x, y) = x + 2y$ est continu et l'ensemble des contraintes est compact car fermé et borné.
2. **Qualification des points :** La contrainte d'égalité $g(x, y) = 3x + y$ est affine et la contrainte d'inégalité $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$ est convexe. De plus, il existe un point (x_0, y_0) vérifiant les contraintes tel que $h(x_0, y_0) < 0$. (cf. le guide sur KKT que je vous ai envoyé). Donc tous les points sont qualifiés pour KKT.
3. **Lagrangien et système KKT :** Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda, \mu) = x + 2y + \lambda \times (3x + y) + \mu \times (x^2 + 2y^2 - 1).$$

   Le système KKT s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ 3x + y = 0 \\ \mu(x^2 + 2y^2 - 1) = 0 \\ \mu \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3\lambda + 2\mu x = 0 \\ 2 + \lambda + 4\mu y = 0 \\ 3x + y = 0 \\ \mu(x^2 + 2y^2 - 1) = 0 \\ \mu \leq 0 \end{cases}$$

   — Supposons $\mu = 0$. Alors $\lambda = -1/3 = -2$ ce qui est absurde.

— Donc $\mu < 0$. Alors

$$\begin{cases} 1+3\lambda+2\mu x = 0 \\ 2+\lambda+4\mu y = 0 \\ 3x+y=0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \\ 1+3\lambda+2\mu x = 0 \\ 2+\lambda+4\mu y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{\sqrt{19}} \\ y = \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \lambda = \frac{-8}{19} \\ \mu = \ldots < 0 \end{cases}$$

Remarque : si $x = \frac{1}{\sqrt{19}}$, alors on aurait $\mu > 0$ ce qui est impossible.

4. **Conclusion :** Le problème admet un unique maximiseur en $x = \frac{-1}{\sqrt{19}}, y = \frac{3}{\sqrt{19}}$ et l'objectif vaut $\frac{5}{\sqrt{19}}$.

Exercice Résoudre le problème suivant :

$$\min_{\substack{x\leq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq (1+x)^3}} \quad x-y$$

1. L'objectif $f(x,y) = x-y$ est une fonction continue, et l'ensemble des contraintes est compact, donc on a existence d'un minimiseur.
2. **Qualification des points :** Posons $h_1(x,y) = x$, $h_2(x,y) = -y$ et $h_3(x,y) = y-(x+1)^3$. Comme h_3 n'est pas convexe, on ne peut pas utiliser les théorèmes classiques de qualification. Posons $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x,y) \leq 0, h_2(x,y) \leq 0, h_3(x,y) \leq 0\}$ l'ensemble des contraintes. Pour $(x,y) \in K$, on se demande si le point (x,y) est qualifié :
   — Si $(x,y) \in \mathring{K}$, (x,y) est automatique qualifié car il ne sature aucune contrainte.
   — Si (x,y) sature la première contrainte et aucune autre, *i.e.* si $h_1(x,y) = 0, h_2(x,y) < 0$ et $h_3(x,y) < 0$. Alors en posant $v = (-1,0)$, on a $\langle \nabla h_1(x,y), v\rangle = \langle (1,0), (-1,0)\rangle = -1 < 0$ donc (x,y) est qualifié.
   — Si (x,y) sature la deuxième contrainte et aucune autre, *i.e.* si $h_1(x,y) < 0, h_2(x,y) = 0$ et $h_3(x,y) < 0$. Alors en posant $v = (0,1)$, on a $\langle \nabla h_2(x,y), v\rangle = \langle (0,-1), (0,1)\rangle = -1 < 0$ donc (x,y) est qualifié.
   — Si (x,y) sature la troisième contrainte et aucune autre, *i.e.* si $h_1(x,y) < 0, h_2(x,y) < 0$ et $h_3(x,y) = 0$. Alors en posant $v = (0,-1)$, on a $\langle \nabla h_3(x,y), v\rangle = \langle (-3(1+x)^2, 1), (0,-1)\rangle = -1 < 0$ donc (x,y) est qualifié.
   — Si (x,y) sature la première et la deuxième contraintes, alors $h_1(x,y) = h_2(x,y) = 0$, *i.e.* $x = y = 0$. Alors en posant $v = (-1,1)$, on a

$$\langle \nabla h_1(x,y), v\rangle = \langle (1,0), (-1,1)\rangle = -1 < 0,$$
$$\langle \nabla h_2(x,y), v\rangle = \langle (0,-1), (-1,1)\rangle = -1 < 0$$

   donc $(x,y) = (0,0)$ est qualifié.
   — Si (x,y) sature la première et la troisième contraintes, alors $h_1(x,y) = h_3(x,y) = 0$, *i.e.* $x = 0$ et $y = 1$. Alors en posant $v = (-1,-4)$, on a

$$\langle \nabla h_1(x,y), v\rangle = \langle (1,0), (-1,-4)\rangle = -1 < 0,$$
$$\langle \nabla h_3(x,y), v\rangle = \langle (-3(1+x)^2, 1), (-1,-4)\rangle = \langle (-3,1), (-1,-4)\rangle = -1 < 0$$

   donc $(x,y) = (0,1)$ est qualifié.
   — Si (x,y) sature la deuxième et la troisième contraintes, alors $h_2(x,y) = h_3(x,y) = 0$, *i.e.* $x = -1$ et $y = 0$. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{cases} \langle \nabla h_2(x,y), v\rangle < 0 \\ \langle \nabla h_3(x,y), v\rangle < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_2 < 0 \\ -3(1+x)^2 v_1 + v_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 > 0 \\ v_2 < 0 \end{cases}$$

   ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de vecteur v tel que $\langle \nabla h_2(x,y), v\rangle < 0$ et simultanément $\langle \nabla h_3(x,y), v\rangle < 0$, donc on ne peut pas conclure quant à la qualification du point $(x,y) = (-1,0)$.

Conclusion de la qualification : tous les points sauf $(-1, 0)$ sont qualifiés.

3. **Lagrangien et KKT :** Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathscr{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = x - y + \mu_1 x - \mu_2 y + \mu_3(y - (1+x)^3).$$

Et le système KKT s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\ \mu_1 x = 0 \\ \mu_2 y = 0 \\ \mu_3(y - (1+x)^3)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \mu_1 - 3\mu_3(1+x)^2 = 0 \\ \mu_3 = 1 + \mu_2 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\ \mu_1 x = 0 \\ \mu_2 y = 0 \\ \mu_3(y - (1+x)^3) = 0 \end{cases}$$

(a) Supposons que $\mu_1 > 0$. Par complementary slackness, $x = 0$. Le système se réécrit :

$$\begin{cases} 1 + \mu_1 - 3\mu_3 = 0 \\ \mu_3 = 1 + \mu_2 \\ \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\ \mu_2 y = 0 \\ \mu_3(y - 1) = 0 \end{cases}$$

i. Si de plus $\mu_3 = 0$, alors $1 + \mu_1 = 0$, si bien que $\mu_1 = -1$. C'est absurde car on a supposé $\mu_1 > 0$.

ii. Donc $\mu_3 > 0$. Par complementary slackness, $y = 1$. Donc par complementary slackness, $\mu_2 = 0$, d'où $\mu_3 = 1$ puis $\mu_1 = 2$. On a obtenu une solution du système KKT :

$$x = 0, y = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 0, \mu_3 = 1.$$

(b) Supposons maintenant que $\mu_1 = 0$. Le système se réécrit alors :

$$\begin{cases} 3\mu_3(1+x)^2 = 1 \\ \mu_3 = 1 + \mu_2 \\ \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\ \mu_2 y = 0 \\ \mu_3(y - (1+x)^3)) = 0 \end{cases}$$

i. Si de plus $\mu_2 > 0$. Par complementary slackness, $y = 0$. Faisons une nouvelle disjonction de cas :

— Si $\mu_3 > 0$. Par complementary slackness, $y = (1+x)^3$, et comme $y = 0$, on a que $x = -1$. Mais alors la première équation donne $0 = 1$, ce qui est absurde.

— Si $\mu_3 = 0$. Alors de même, la première équation donne $0 = 1$, c'est absurde.

ii. Donc $\mu_2 = 0$. Le système devient donc :

$$\begin{cases} 3(1+x)^2 = 1 \\ \mu_3 = 1 \\ \mu_3(y - (1+x)^3)) = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $x = \sqrt{\frac{1}{3}} - 1$. De plus, comme $\mu_3 = 1 > 0$, par complementary slackness, $y = (1+x)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}$. On a donc obtenu une solution du système KKT :

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} - 1, y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 1.$$

Conclusion de la résolution : le système KKT possède deux solutions $(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$:

$$(0,1,2,0,1) \text{ et } \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - 1, \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}, 0, 0, 1\right).$$

4. **Conclusion.** L'objectif est $f(x, y) = x - y$. Calculons la valeur de f pour chacune des solutions de KKT, ainsi que pour le point non qualifié :

$$f(0,1) = 0 - 1 = -1 \tag{1}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - 1, \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} - 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 \approx -0.615 \tag{2}$$

$$f(-1,0) = -1 - 0 = -1 \tag{3}$$

donc le problème possède deux minimiseurs aux point $(0,1)$ et $(-1,0)$, et la valeur du problème est -1.

Remarque : il existe une solution de KKT qui n'est pas optimale, et une solution du problème qui n'était pas qualifiée pour KKT. Ceci est tout à fait possible pour un problème non-convexe : optimal et qualifié $\Rightarrow$ solution du système KKT. Mais la réciproque est fausse en général.

4 TD du mardi 7 avril

4.1 Rappels de cours : dualité

On considère le problème de minimisation suivant, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\min_{\substack{g(x)=0 \\ h(x)\leq 0}} f(x).$$

Ce problème est notre problème de départ, on l'appellera donc le **problème primal**. On a vu que ce problème primal pouvait se réécrire sous la forme suivante :

$$\min_{\substack{g(x)=0 \\ h(x)\leq 0}} f(x) = \min_x \left\{ f(x) + \sup_{\mu \geq 0} \mu \times h(x) + \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda \times g(x) \right\}.$$

En réordonnant un peu les choses, cela se réécrit donc :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R} \\ \mu\geq 0}} f(x) + \mu \times h(x) + \lambda \times g(x).$$

On reconnaît alors le Lagrangien de notre problème : $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \mu \times h(x) + \lambda \times g(x)$, si bien que le problème primal s'écrit :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R} \\ \mu\geq 0}} \mathscr{L}(x, \lambda, \mu).$$

Le **problème dual** correspondant s'obtient en intervertissant formellement le min et le sup :

$$\sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R} \\ \mu\geq 0}} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathscr{L}(x, \lambda, \mu).$$

ATTENTION : il n'y a *a priori* aucune raison pour que le problème dual soit égal au problème primal ! ! ! Cependant, il y a une inégalité qui est toujours vérifiée, que l'on appelle *inégalité de dualité faible* :

Problème dual $\leq$ Problème primal

En effet, $\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y)$ est toujours vérifié :

$$\begin{aligned} &\inf_x f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \\ \Rightarrow &\sup_y \inf_x \ f(x, y) \leq \sup_y f(x_0, y) \\ \Rightarrow &\sup_y \inf_x \ f(x, y) \leq \inf_x \ \sup_y f(x, y) \end{aligned}$$

La différence entre la valeur du primal et du dual est appelée *saut de dualité*. S'il y a égalité entre les valeurs des problèmes primal et dual, *i.e.* si le saut de dualité est nul, on dira qu'il y a **dualité forte**.

La dualité, quand elle est forte, permet d'obtenir des propriétés théoriques sur le problème, et parfois (souvent) de le résoudre plus facilement. Il faut donc pouvoir savoir à l'avance quand il y a dualité forte ou non.

Une condition suffisante pour avoir dualité forte est que le problème est convexe. Ainsi, il y a dualité forte pour tout problème convexe (fonction objectif f convexe, toutes les contraintes d'inégalités h_j convexes et les contraintes d'égalité g_i linéaires).

4.2 Exercices

Exercice Écrire le problème dual correspondant au primal suivant, le résoudre et dire s'il y a dualité forte :

$$\min_{\substack{x+2y=4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0}} x^2 + y^2$$

1. **Écriture du Lagrangien :** Le Lagrangien du problème s'écrit :

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda, \mu_1, \mu_2) = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 4) - \mu_1 x - \mu_2 y$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \mu_2 \geq 0$.

2. Le problème dual s'écrit :

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \mu_1\geq 0\\ \mu_2\geq 0}} \inf_{x,y\in\mathbb{R}} \mathscr{L}(x, y, \lambda, \mu_1, \mu_2) &= \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \mu_1\geq 0\\ \mu_2\geq 0}} \inf_{x,y\in\mathbb{R}} x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 4) - \mu_1 x - \mu_2 y \\
&= \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \mu_1\geq 0\\ \mu_2\geq 0}} \left\{ -4\lambda + \inf_{x\in\mathbb{R}} \left[x^2 + (\lambda - \mu_1)x\right] + \inf_{y\in\mathbb{R}} \left[y^2 + (2\lambda - \mu_2)y\right] \right\} \\
&= \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \mu_1\geq 0\\ \mu_2\geq 0}} \left\{ -4\lambda - \frac{(\mu_1 - \lambda)^2}{4} - \left(\frac{\mu_2}{2} - \lambda\right)^2 \right\} \\
&= - \inf_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \mu_1\geq 0\\ \mu_2\geq 0}} \left\{ 4\lambda + \frac{(\mu_1 - \lambda)^2}{4} + \left(\frac{\mu_2}{2} - \lambda\right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

3. **Résolution du problème dual :** Existence par coercivité. Qualification de tous les points automatique par linéarité des contraintes. Puis écriture du Lagrangien du problème dual :

$$\widehat{\mathscr{L}}(\lambda, \mu_1, \mu_2, \alpha, \beta) = 4\lambda + \frac{(\mu_1 - \lambda)^2}{4} + \left(\frac{\mu_2}{2} - \lambda\right)^2 - \alpha\mu_1 - \beta\mu_2$$

Puis écriture du système KKT :

$$\begin{cases} \frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial\lambda} = 0 \\ \frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial\mu_1} = 0 \\ \frac{\partial\widehat{\mathscr{L}}}{\partial\mu_2} = 0 \\ \alpha, \beta \geq 0 \\ \alpha\mu_1 = 0 \\ \beta\mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + \frac{1}{2}(\lambda - \mu_1) + 2\left(\lambda - \frac{\mu_2}{2}\right) = 0 \\ \frac{1}{2}(\mu_1 - \lambda) - \alpha = 0 \\ \left(\frac{\mu_2}{2} - \lambda\right) - \beta = 0 \\ \alpha, \beta \geq 0 \\ \alpha\mu_1 = 0 \\ \beta\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Puis on résout ce système en faisant des disjonctions de cas selon la complementary slackness :

— *Supposons que* $\alpha > 0$. Alors par complementary slackness, $\mu_1 = 0$. Le système se réécrit ainsi, après simplifications :

$$\begin{cases} \mu_2 = 4 + \frac{5}{2}\lambda \\ 2\alpha = -\lambda \\ \beta = \frac{\mu_2}{2} - \lambda \\ \mu_1 = 0 \\ \beta \geq 0 \\ \beta\mu_2 = 0 \end{cases}$$

— *Supposons de plus que* $\beta > 0$. Par complementary slackness, $\mu_2 = 0$. Le système se réécrit donc :

$$\begin{cases} 0 = 4 + \frac{5}{2}\lambda \\ 2\alpha = -\lambda \\ \beta = -\lambda \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{8}{5} \\ \alpha = \frac{4}{5} \\ \beta = \frac{8}{5} \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne une première solution du système KKT.

— *Supposons désormais que* $\beta = 0$. Le système se réécrit alors :

$$\begin{cases} \mu_2 = 4 + \frac{5}{2}\lambda \\ 2\alpha = -\lambda \\ 0 = \frac{\mu_2}{2} - \lambda \\ \mu_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2 = 4 + \frac{5}{2}\lambda \\ 2\alpha = -\lambda \\ \lambda = \frac{\mu_2}{2} \\ \mu_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -8 \\ \alpha = 4 \\ \mu_2 = -16 \\ \beta = 0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases}$$

ce qui est absurde, car $\mu_2 = -16 < 0$ alors qu'on avait la contrainte $\mu_2 \geq 0$.

— *Il reste à traiter le cas où* $\alpha = 0$. Dans ce cas, le système KKT s'écrit :

$$\begin{cases} 4 + \frac{1}{2}(\lambda - \mu_1) + 2\left(\lambda - \frac{\mu_2}{2}\right) = 0 \\ \mu_1 = \lambda \\ \beta = \frac{\mu_2}{2} - \lambda \\ \beta \geq 0 \\ \beta\mu_2 = 0 \end{cases}$$

— *Supposons de plus que* $\beta > 0$. Alors par complementary slackness, $\mu_2 = 0$. Le système se réécrit donc :

$$\begin{cases} 4 + \frac{5}{2}\lambda = \frac{1}{2}\mu_1 \\ \mu_1 = \lambda \\ \beta = -\lambda \\ \mu_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2\lambda = 0 \\ \mu_1 = \lambda \\ \beta = -\lambda \\ \mu_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu_1 = -2 \\ \beta = 2 \\ \mu_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui est absurde car $\mu_1 = -1 < 0$ alors qu'on a la contrainte $\mu_1 \geq 0$.

— *Donc* $\beta = 0$. Dans ce cas, $\alpha = \beta = 0$, et le système se réécrit :

$$\begin{cases} 4 + \frac{1}{2}(\lambda - \mu_1) + 2\left(\lambda - \frac{\mu_2}{2}\right) = 0 \\ \mu_1 = \lambda \\ \mu_2 = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 0 \\ \mu_1 = \lambda \\ \mu_2 = 2\lambda \end{cases}$$

ce qui est absurde.

Conclusion de la résolution du système KKT : Le système KKT possède une unique solution $\lambda = -\frac{8}{5}, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{8}{5}$. La valeur du minimum est donc :

$$4\lambda + \frac{(\mu_1 - \lambda)^2}{4} + \left(\frac{\mu_2}{2} - \lambda\right)^2 = -\frac{16}{5}.$$

Comme on avait rajouté un signe $-$, la valeur du problème dual est en fait égale à $-\left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{16}{5}$.

4. Le problème primal est convexe, donc on a dualité forte. C'est effectivement le cas, puisque la valeur du primal est bien $\frac{16}{5}$, égale à celle du dual. *Remarque :* on avait calculé la valeur du primal lors du TD du 23 mars (*cf.* section 1). Notons aussi que les solutions du système KKT du primal et du dual sont en fait les mêmes ! On a les mêmes valeurs de λ, μ_1, μ_2, et α correspond à x et β à y.

Exercice (Annale 2019, sur 6 points) Résoudre le problème suivant. Écrire son dual et dire s'il y a dualité forte.

$$\min_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ x\leq y \\ y\geq 0}} e^y$$

1. Clairement, le problème vaut au moins 1 car $y \geq 0$ et l'exponentielle est croissante. Si on prend $y = 0$ et $x \leq 0$, alors $e^y = 1$. Donc l'ensemble des solutions est $\{(x, 0) \,|\, x \leq 0\}$.
2. On écrit le Lagrangien du problème :

$$\mathscr{L}(x, y, \mu_1, \mu_2) = e^y + \mu_1(x - y) - \mu_2 y.$$

   Puis on écrit le problème dual :

$$\sup_{\substack{\mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0}} \inf_{x,y \in \mathbb{R}} e^y + \mu_1(x - y) - \mu_2 y.$$

   Le problème $\inf_{x,y} e^y + \mu_1(x - y) - \mu_2 y$ est séparable selon x et y, donc :

$$\inf_{x,y \in \mathbb{R}} e^y + \mu_1(x - y) - \mu_2 y = \inf_{x \in \mathbb{R}} \mu_1 x + \inf_{y \in \mathbb{R}} e^y - (\mu_1 + \mu_2) y.$$

   Or

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \mu_1 x = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_1 = 0 \\ -\infty & \text{si } \mu_1 > 0 \end{cases}$$

   ce qui s'interprètera comme une contrainte $\mu_1 = 0$ dans le supremum du problème dual. On a par ailleurs (par convexité de l'objectif et la condition du premier ordre) :

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} e^y - (\mu_1 + \mu_2) y = \mu_1 + \mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) \log (\mu_1 + \mu_2).$$

   Donc on peut revenir au problème dual :

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{\mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_1 = 0}} \mu_1 + \mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) \log (\mu_1 + \mu_2) \\ &\qquad = \sup_{\mu_2 \geq 0} \mu_2 - \mu_2 \log (\mu_2). \end{aligned}$$

   avec la convention $0 \log(0) = 0$.
3. Comme le problème est convexe, on sait qu'on a dualité forte. Donc la valeur du problème dual est égale à celle du problème primal, qui était 1. On peut le vérifier : la fonction

$$\mu_2 \mapsto \mu_2 \left(1 - \log(\mu_2)\right)$$

   atteint son maximum en $\mu_2^\star = 1$ (c'est une fonction concave, et la condition du premier ordre donne $\mu_2^\star = 1$). Et on a bien que le dual vaut $\mu_2^\star - \mu_2^\star \log(\mu_2^\star) = 1 - 1 \times 0 = 1$.